FOS 2001 Technik
Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \frac{1+\ln(x^2)}{x}$ in der maximal möglichen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4	1.1	Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft, und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
5	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to 0$, $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.
4	1.3	Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f. (Teilergebnis: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1-\ln(x^2)}{x^2}$)
9	1.4	Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extremalpunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
6	1.5	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-5 \le x \le 5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte f(0,4), f(1) und f(5). Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.
	2.0	Gegeben sind nun die reellen Funktionen $g_a: x \mapsto (1-a)\cdot x + \frac{2}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der maximal möglichen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
5	2.1	Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl und gegebenenfalls die Abszissen der Punkte, in denen der Graph der Funktion g_a waagrechte Tangenten besitzt.
		Nun werden die Funktionen f aus Aufgabe 1 und $g_1: x \mapsto \frac{2}{x}$ (für a = 1) in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachtet.
6	2.2	Berechnen Sie für die Graphen der Funktionen f und g_1 die Abszissen ihrer Schnittpunkte, und zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1 im Bereich $-5 \le x \le 5$ in das Schaubild aus Teilaufgabe 1.5 ein. (Teilergebnis: $x_1 = -1$)
4	2.3	Zeigen Sie, dass für $x < 0$ und $C \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: $\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx = (\ln(-x))^2 + C$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A I :*

5 2.4 Die Graphen der Funktionen f und g_1 und die Gerade mit der Gleichung $x = -3$ schließen im dritten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

7 2.5 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_k an den Graphen der Funktion g_1 an der Stelle $x = k$ für $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.
Tragen Sie für den Sonderfall $k = 2$ die Tangente t_2 in Ihre Zeichnung ein.
Weisen Sie nun nach, dass der Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente t_k mit den Koordinatenachsen einschließt, von k unabhängig ist.
(Teilergebnis: $t_k : y = -\frac{2}{k^2} \cdot x + \frac{4}{k}$)